Wydziałowy Turniej Fizyczny I, Etap I - rozwiązania zadań

20 września 2023

Rozwiązanie 1. Odpowiedź: 45° (w formularzu wpisać odpowiedź: 45). W układzie odniesienia nieinercjalnym związanym ze spadającą małpą, mamy do czynienia ruchem jednostajnym prostoliniowym, bez grawitacji, gdzie cel znajduje się pod kątem 45 stopni.

Rozwiązanie 2. Kolejność to 213.

Rozwiązanie 3. Odpowiedź: 81. Oddziaływanie dipola elektrycznego złożonego z ładunków z przewodzącą płaszczyzną rozpatrujemy metodą obrazów. Siła przyciągania ładunki-płaszczyzna jest taka sama jak między dipolem złożonym z naszych ładunków a lustrzanym dipolem znajdującym się po drugiej stronie płaszczyzny (ale przeciwnie skierowanym). Pole elektryczne pochodzące od dipola „obrazowego” wynosi:

$$\vec{E} = \frac{-\vec{d_1}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Energia oddziaływania układu dwóch dipoli wyraża się przez:

$$U = -\vec{d_2}\cdot\vec{E} = \frac{\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}}{4\pi\epsilon r^3}$$

Siła oddziaływania między dwoma dipolami zmienia się zatem z potęgą -4:

$$F = \frac{3\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}}{4\pi\epsilon_0 r^4}.$$

Rozwiązanie 4. Odpowiedź: 4. Piłka cały czas ma przyspieszenie g.

Rozwiązanie 5. Odpowiedź: 1. Tuż po uwolnieniu piłki z ręki dziecka przyspieszenie było sumą przyspieszenia grawitacyjnego i pochodzącego od siły oporu powietrza, a zwroty tych dwóch sił są zgodne.

Rozwiązanie 6. Moment bezwładności względem osi obrotu: $I = \frac{m}{2}r^2 + \frac{1}{12}ml^2 + m(\frac{l}{2}+r)^2$. Energia przy wychyleniu o małe θ :

$$E = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{k_1}{2}\left(r+\frac{l}{2}\right)^2\sin^2\theta + \frac{k_2}{2}\left(r+\frac{3}{4}l\right)^2\sin^2\theta + mg\left(\frac{l}{2}+r\right)(1-\cos\theta),$$

przybliżenie $\sin\theta \approx \theta, 1-\cos\theta \approx \frac{\theta^2}{2}$.

$$E = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{k_1}{2}\left(\frac{l}{2}+r\right)^2\theta^2 + \frac{k_2}{2}\left(r+\frac{3}{4}l\right)^2\theta^2 + mg\left(\frac{l}{2}+r\right)\frac{\theta^2}{2}.$$

Powyższe wyrażenie jest postaci wyrażenia na całkowitą energię mechaniczną oscylatora harmonicznego:

$$E = \frac{M}{2}\omega^2 + \frac{K}{2}\theta^2,$$

dla którego mamy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}.$$

Po podstawieniu parametrów z treści zadania, okres:

$$T = 8\pi\frac{\sqrt{\frac{m(2l^2+6lr+9r^2)}{8gm(l+2r)+4k_1(l+2r)^2+k_2(3l+4r)^2}}}{\sqrt{3}}.$$

Odpowiedź: 2.38159s = 2381.59ms. Część całkowita: 2381 (nie 2382).

Rozwiązanie 7 i 8. Odpowiedzi: 1041 i 1111. Wyznaczamy rekurencyjny wzór na moment bezwładności graniastosłupa o podstawie T_{n+1}, bazując na podstawie znanego z poprzedniego kroku T_n. Graniastosłup składa się z 3 kopii zmniejszonych 2 krotnie (w sensie wymiarów liniowych) graniastosłupów o podstawie T_n. Masa każdej z 3 kopii wynosi $M/3$. Z twierdzenia Steinera:

$$I_{n+1} = 3I_n\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2^2}\right) + 3(M/3)\left(\frac{a\sqrt{3}}{2\cdot 3}\right)^2 = \frac{1}{4}I_n + \frac{M}{12}a^2,$$

zaś wartość początkowa:

$$I_0 = \frac{1}{12}Ma^2.$$

W szczególności:

$$I_1 = \frac{5}{48}ma^2.$$

Wartość graniczną I_∞ otrzymujemy rozwiązując równanie

$$I_\infty = \frac{1}{4}I_\infty + \frac{M}{12}a^2,$$

co prowadzi do wyniku:

$$I_\infty = \frac{1}{9}ma^2.$$

Rozwiązanie 9. Rozwiązanie jest wspomagane numeryką. Prowadzimy obliczenia, przyjmując 1mm jako jednostkę długości, 1g jako jednostkę masy, wówczas

$$k_1 = 100\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\frac{1}{\mathrm{m}} = 100\cdot 10^3\mathrm{g}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 100\frac{\mathrm{g\,mm}}{\mathrm{s}^2},$$

$$k_2 = 10^8\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\frac{1}{\mathrm{m}^3} = 10^8\cdot 10^{-3}\mathrm{g}\,\frac{1}{\mathrm{s}^2\mathrm{mm}10^3} = 10^2\frac{\mathrm{g}}{s^2\mathrm{mm}}.$$

Liczbowo:

$$x_1'' = -100x_1, \quad x_1'(0) = 0, \quad x_1(0) = 2,$$

$$x_2'' = -100x_2^3, \quad x_2'(0) = 0, \quad x_2(0) = 2.$$

Całkowanie powyższych równań należy przeprowadzić w czasie jednego okresu. Przy czym równanie na x_1 jest zwykłym ruchem harmonicznym i można analitycznie określić, że $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{1}{100}} \approx 0.628319....$ Wartość T_2 odczytujemy jako $T_2 \approx 0.370815$. Daje to $1000T_2/T_1 = 590.17$. Do otrzymania dobrego wyniku wystarczą 4 cyfry znaczące T_1 oraz T_2.

Wartość x_0 to

$$x_0 = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} = 1\mathrm{mm}.$$

Odpowiedź: 590.

Rozwiązanie 10. W rozwiązaniu stosujemy formalizm zespolony. Jest on równoważny „wskazom", ale prostszy w użyciu. Napięcie $U(t) = \mathrm{Re}\tilde{U}e^{i\omega t}$. Prąd płynący przez układ $Z\tilde{I} = \tilde{U}$, gdzie Z - zespolona impedancja. Wtedy $I(t) = \mathrm{Re}\tilde{I}e^{i\omega t}$. Z symetrii problemu prądy przez elementy R, L, C są identyczne i wynoszą $\tilde{I}_R, \tilde{I}_L, \tilde{I}_C$. Mamy też:

$$\tilde{I} = 3\tilde{I}_C, \quad \tilde{I}_C = 2\tilde{I}_R = \tilde{I}_L.$$

Wreszcie

$$\tilde{I}_C\frac{1}{i\omega C} + \tilde{I}_R R + \tilde{I}_L L\omega i = \tilde{U}.$$

Odpowiedź:

$$\tilde{I} = \frac{6C\omega i}{2 + iRC\omega - 2LC\omega^2}\tilde{U}.$$

Po wstawieniu liczb:

$$|\tilde{I}| = 0.072\frac{\omega}{\sqrt{(2\cdot 10^{-6}\omega^2-2)^2+0.101^2\omega^2}}.$$

Można tak opisany wzór wczytać do Excela i poszukać maksimum. Jest ono osiągane dla $\omega = 1000\text{Hz}$.

Wartość numeryczna maksimum: 712 mA. Co ciekawe w przypadku błędu wyznaczenia wartości maksimum, przypadkowo poprawną wartość można uzyskać o ile wyznaczone $\omega \in [351\text{Hz}, 2850\text{Hz}]$ (granice tego odcinka są przybliżone).

Rozwiązanie 11. Z treści zadania wynika, że $I(3V) = 1A$,więc $I_0 = 1.6303834277620 \cdot 10^{-26}A$. Pierwsze równanie, dla U – napięcia na diodzie:

$$10V = 3U + R\,I(U).$$

Wydzielana moc to $P(R) = U(R) \cdot I(U(R))$, dla $U = 3V$ wynosi ona $3W$. Należy znaleźć wartość R, dla której moc wyniesie 0.3W. Wykres $I(U)$ jest bardzo stromy: dla $U = 2.8V$ mamy natężenie prądu $I(2.8V) = 0.19\text{mA}$, zaś $I(3.2V) = 52A$. Badając wykres $U\,I(U)$ w funkcji $U \in [2.8V, 3.2V]$ otrzymujemy szukaną wartość $U_0 = 2.88562932...\,V$.

Z równania $10V = 3 \times U_0 + R\,\frac{0.3W}{U_0}$ obliczamy $R = 12919m\Omega$.

Rozwiązanie 12. Odpowiedzi do poszczególnych punktów

1. Odpowiedź $2^{25} = 33554432$, liczba konfiguracji 2^{L^2}.

2. Szukamy L takiego by $2^{L^2} < 10^{80} < 2^{(L+1)^2}$. Szukane $L = 16$.

3. Odpowiedzią jest: $E(s) = -h(9-7) - JP_+ + JP_-$. Liczba P_+ to liczba par sąsiednich kwadratów z takimi samymi znakami (w pionie lub w poziomie). $P_+ = 6$, bo w poziomie jest tylko jedna taka para, a w pionie 5. $P_- = 24 - P_+ = 18$ bo wszystkich par sąsiednich jest 24. Łącznie $E(s) = -2 - 6 + 18 = 10$. Odp: 10.

4. Dla $L = 2$ mamy 16 konfiguracji, ale z uwagi na symetrie, tak naprawdę mamy 6 istotnie różnych konfiguracji. Możemy mieć $(s_1, s_2, s_3, s_4) \in \{++++, ----, +---, -+++, +--+, ++--\}$. Wtedy odpowiednio $E(s) = -8, 0, 2, -2, 4, 0$, przy czym konfiguracje mają „krotność” odpowiednio $1, 1, 4, 4, 2, 4$. Zatem $Z_T = 5e^0 + e^{8/T} + 4e^{2/T} + 4e^{-2/T} + 2e^{-4/T}$. Obliczamy prawdopodobieństwo $100/P(0) = 100/(5e^0/Z_{T=10}) = 20Z_{T=10} = 334.534$. Odp: 334.

5. Rozwiązanie jest analogiczne do powyższego, jedynie sumowanie po wszystkich 2^{16} konfiguracji warto przeprowadzić przy pomocy komputera. Program powinien przebiegać wszystkie 16-znakowe słowa złożone z alfabetu $\{+, -\}$ - zakodowane przy pomocy „0” i „1”, dla każdej konfiguracji liczyć wartość $E(s)$ i odpowiednio sumować wynik. Odpowiedź: 945.3044, zatem w formularzu wpisać 945.

6. Rozwiązanie numeryczne bazujące na punkcie poprzednim. W poprzednim obliczaliśmy $Z_T = \sum_s e^{-E(s)/T}$. W tym punkcie obliczamy $A = \sum_s e^{-E(s)/T}\sigma(s)$. Następnie $M(T) = A/Z_T$, oraz $M(0.25) = 0.9999999999811117$, $M(4) = 0.5184034063012224$. Łącznie $100M(0.25)/M(4) = 192.8999670$. Odpowiedź: 192.